ITM Web of Conferences **39**, 01005 (2021) https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901005
CIFEM'2020

Le changement d'axiomatique dans l'enseignement de la géométrie

The axiomatic change in geometry teaching

Slim Mrabet[1*]

[1]Université de Carthage, Tunisie

Résumé. Dans l'enseignement tunisien, la transition collège-lycée en géométrie est marquée par un changement de point de vue dans la résolution des problèmes : les outils traditionnels de la géométrie rencontrés au collège seront accompagnés par le nouvel outil vectoriel. Pour contribuer à la question des difficultés éventuelles qui accompagnent cette transition, nous faisons un retour sur l'histoire de la géométrie et de son enseignement pour fixer des axiomatiques différentes qui nous servent de référence pour analyser l'enseignement actuel. Nous nous servons du théorème de Thalès qui, avec ses différentes approches, se place au cœur de cette transition, et analysons sa vie dans le système tunisien. Une expérimentation menée auprès d'élèves tunisiens et français montre que dans les deux pays, le passage de la géométrie classique à la géométrie vectorielle leur pose des difficultés différentes. L'analyse de ces difficultés et des avis des enseignants des classes visitées, montre que cette problématique est une piste qui mérite d'être explorée.

Abstract. In the Tunisian education system, the transition from college to high school has brought about a shift in perspectives on how to teach problem solving in geometry. The traditional teaching aids of geometry encountered by the learner in college are later followed by the integration of new vector products at high school. To deal with the possible learning challenges that come with this transition, we presented an overview of the history of geometry teaching. Our aim was to set different axiomatic that could serve as a reference for us to analyse current methods of teaching. We used Thales Theorem, with its various approaches, because it lies at the core of the aforementioned transition. We also analysed its existence in the Tunisian education system. A conducted experiment on Tunisian and French students showed that, in both countries, the transition from classical to vector geometry posed various challenges for learners. The analysis of these

*Corresponding author: mrabet_slim@yahoo.fr

challenges along with the opinions collected from the participants' teachers showed that this issue needs further exploration.

1 Introduction

A l'intérieur d'un système scolaire, une question fondamentale se pose aux différents acteurs de ce système : comment découper le texte du savoir à enseigner ? Il s'agit de décider, dans ce découpage, d'une progression particulière parmi d'autres possibles dans l'enchaînement des connaissances. Cette progression est en gros fixée par les programmes, mais pour l'enseignant, il reste toujours des choix à faire.

Dans ce travail, nous nous interrogeons sur les moments de passage entre quelques types de géométrie dans l'enseignement actuel, sur les difficultés que peuvent rencontrer les enseignants et les élèves, et sur la façon dont ce sujet est traité dans les programmes scolaires. En didactique, peu de travaux de recherches se sont intéressés aux contraintes et aux enchaînements des situations d'enseignement ainsi qu'aux différences entre les agencements choisis dans l'enseignement [1].

Nous nous intéressons particulièrement à la transition collège-lycée en géométrie. Cette période est marquée par un changement de point de vue dans la résolution des problèmes qui consiste en une algébrisation de plus en plus manifeste de la géométrie : les outils traditionnels de la géométrie, rencontrés au collège, seront accompagnés par le nouvel outil vectoriel ce qui suppose un changement dans la « boite à outils » disponible chez les élèves pour résoudre les problèmes. Nous tentons, par conséquent, de contribuer à l'étude de la problématique de l'enseignement de la géométrie dans cette transition en nous centrant sur un concept particulier qui caractérise ce niveau : le théorème de Thalès, ainsi que sur certains concepts qui l'entourent.

2 Méthodologie

Pour traiter la question du passage entre des types divers de géométrie, nous nous referons à un travail antérieur sur l'histoire des mathématiques et de son enseignement, qui a permis de distinguer des axiomatiques différentes en géométrie, caractérisées en particulier par des changements de statut et de rôle des figures dans les démonstrations. Ces axiomatiques vont servir de référence pour analyser l'enseignement actuel. Ainsi, dans ce qui suit, nous analysons les caractéristiques de ces différentes axiomatiques, discutons de la place de chacune dans l'enseignement actuel et étudions, à partir de l'exemple du théorème de Thalès, la façon dont le passage entre deux de ces axiomatiques est négocié dans l'enseignement de la géométrie en Tunisie, et les conséquences didactiques qui en découlent sur l'apprentissage des élèves. Nous faisons un retour sur des travaux de recherche en didactique pour explorer les différentes approches relatives au théorème de Thalès, leurs rapports avec nos axiomatiques, puis nous analysons brièvement la vie de ce concept dans l'enseignement tunisien. Pour appuyer nos idées, nous choisissons le système français comme point de comparaison, proposons une même expérimentation à d'élèves tunisiens et français, et faisons une étude comparative entre les résultats dans les deux pays. L'accent sera mis sur les difficultés rencontrées par les élèves des deux pays, notamment celles qui relèvent d'un changement d'axiomatique. Pour éclairer certains points, nous nous référons parfois à un entretien qu'on a fait auprès des enseignants des classes visitées, qui a pour but de fixer les attentes des enseignants et leurs prévisions sur les productions de leurs élèves.

3 Les grands domaines de la géométrie

Une étude de certains traités historiques et de l'histoire de l'enseignement des mathématiques en Tunisie ou ailleurs que nous avons menée dans notre thèse de doctorat [2] nous a permis de fixer trois grands domaines de la géométrie :

3.1 La géométrie élémentaire

Les Eléments d'Euclide constituent un moment important de l'évolution de la géométrie. Dès l'Antiquité, ils étaient considérés comme un moyen de rompre avec l'appréhension perceptive dominante à ce moment. La géométrie d'Euclide et de ses successeurs est basée sur la mesure des grandeurs géométriques à travers des figures. C'est une science où les figures, situées dans un plan ou dans l'espace, occupent une place centrale. Chez Euclide, les figures apparaissent figées et ne peuvent qu'être découpées, superposées ou reconstruites. L'un des principes forts de la géométrie chez Euclide est le principe de l'égalité par superposition. Euclide énonce parmi ses axiomes ce qui suit : « Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles ». Cette condition d'égalité qui fait appel au mouvement, celui de la superposition, fixe des critères d'égalité à partir desquels le mouvement des figures n'est plus utile. En effet, la démonstration du premier cas d'égalité des triangles utilise le mouvement à partir du principe de l'égalité par superposition. L'énoncé de ce premier cas d'égalité permet de se débarrasser par la suite du mouvement.

Cette géométrie est également caractérisée par la prédominance du raisonnement qui l'emporte sur l'aspect calculatoire, et l'un de ses objectifs est d'établir des relations entre les figures semblables (du plan ou de l'espace) et des proportions.

3.2 La géométrie des transformations

Dans la deuxième moitié du XIXe siècle, la notion de « mouvement de figures » devient fondamentale et est insérée dans les démonstrations en géométrie marquant ainsi une rupture avec les traditions euclidiennes [3]. A partir de l'idée de déplacement, l'étude des relations entre les figures de l'espace a conduit progressivement à la notion de transformation, qui étudie les figures et surtout les relations entre ces figures.

Nous pouvons dire qu'une différence essentielle entre la géométrie élémentaire et la géométrie des transformations réside dans le changement d'appréhension de la figure : dans la géométrie classique, nous regardons les figures comme étant des surfaces et nous les comparons en comparant leurs éléments (angles, côtés), mais ces figures sont statiques. La géométrie des transformations met en avant les droites et les points par rapport aux surfaces et favorise le mouvement et le transfert de propriétés entre des figures. Chasles [4] définit ce point de vue comme permettant de retrouver les propriétés caractéristiques d'une figure de départ par application d'une transformation : « Qu'on prenne une figure quelconque dans l'espace, et l'une de ses propriétés connues ; qu'on applique à cette figure l'un de ces modes de transformations, et qu'on suive les diverses modifications ou transformations qui éprouvent le théorème qui exprime cette propriété, on aura une nouvelle figure et une propriété de cette figure qui correspond à celle de la première » (p. 268).

3.3 La géométrie analytique

Dans le cadre analytique, la signification des transformations peut être occultée par des propriétés où la puissance du calcul remplace les configurations. Les traités de Choquet [5] et de Dieudonné [6] montrent la puissance de l'aspect calculatoire dans la résolution des problèmes de géométrie, qui l'emporte sur le raisonnement sur les figures. Dans son traité, Dieudonné mène une comparaison entre la géométrie basée sur l'algèbre linéaire, proche de la géométrie analytique et la géométrie traditionnelle :

- L'algèbre linéaire permet, à partir d'axiomes extrêmement simples, d'avoir des résultats importants par un calcul concis et précis. La géométrie traditionnelle part d'axiomes compliqués. Dans la résolution de problèmes, elle fait un détour pour ramener le problème à un cas d'égalité ou de similitude de triangles.
- L'algèbre linéaire retrouve tous les résultats de la géométrie classique rapidement et rigoureusement. Elle peut être enseignée à tous les élèves compte-tenu de la simplicité des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire.
- Contrairement à sa réputation d'être une science abstraite, les possibilités d'avoir des objets représentables à chaque étape permettent de mettre l'accent sur la pratique des graphiques vu leur importance dans plusieurs domaines. La géométrie traditionnelle ne sert qu'aux futurs professeurs de mathématiques. Ses systèmes sont tellement complexes que l'on ne peut les enseigner qu'à des spécialistes. Ceci n'est pas la mission de l'enseignement secondaire, puisque les élèves qui seraient des spécialistes ne forment qu'une minorité de l'ensemble total des élèves.
- L'algèbre linéaire traite séparément, dès le début, les propriétés de nature « affine » et celles de nature « métrique » ainsi que leurs conséquences. La géométrie traditionnelle a l'inconvénient de mettre au même niveau deux notions de natures différentes : le parallélisme et la perpendicularité.

Le travail de Rauscher [7] indique que l'enseignement de la géométrie passe par trois stades différents :

- La géométrie d'observation : c'est la géométrie réservée au primaire. Elle se base sur le visuel et sur les mesures effectuées sur les dessins comme moyens de validation et donne donc au dessin le statut de preuve.
- La géométrie de traitement : elle commence en début de collège et constitue réellement la transition entre la géométrie d'observation et la géométrie déductive. Dans cette période, l'élève est initié à distinguer entre les informations qui définissent une situation et celles qui en résultent, et à effectuer le passage d'un registre à l'autre (texte, figure, codages, symboles…).
- La géométrie déductive qui apparaît en fin de collège et qui prend appui sur le raisonnement déductif. L'élève est appelé à faire l'articulation entre différents registres d'expression mathématique que ce soit à l'écrit ou à l'oral : des allers-retours entre le texte et le dessin.

Le passage à la géométrie basée sur l'algèbre linéaire doit se faire avec prudence : la puissance du calcul vectoriel occulte le rôle des figures et constitue une rupture avec la géométrie enseignée pour plusieurs années.

4 Etude d'un exemple : le théorème de Thalès

4.1 Distinction dessin-figure en géométrie

Le dessin désigne l'objet concrètement tracé sur une feuille de papier alors que la figure appartient au monde de la géométrie dont le dessin n'est qu'une représentation ou encore une matérialisation sur le papier, sur le sable ou sur l'écran de l'ordinateur. Lorsque deux dessins diffèrent par une mobilisation de certaines variables, la non abstraction par l'élève de l'objet théorique auquel renvoient ces dessins peut lui donner l'illusion de l'existence de deux figures différentes [8].

Le changement du statut du dessin vers celui de la figure, qui est une rupture épistémologique, constitue une réelle difficulté dans l'enseignement et l'apprentissage de la démonstration: les élèves ne sont pas prêts à réorganiser leur pensée sur la base des notions abstraites. En même temps, parfois, les enseignants inconscients de cette rupture ne peuvent pas mener un discours explicite pour expliquer ce statut de la figure. Dans le cas du théorème de Thalès, la diversité des figures qui lui sont associées constitue à la fois une source de richesse et une difficulté des élèves.

4.2 Les énoncés du théorème de Thalès

Pour fixer les idées, nous désignons par théorème de Thalès le théorème qui satisfait aux classifications de Brousseau [9] ou celle de Duperret [10]. Nous nous contentons donc des énoncés plans et rappelons qu'il s'agit de deux approches essentielles : l' « homothétie » et la « projection ». Dans une figure formée de deux sécantes coupées par des parallèles, la deuxième approche se sépare en deux aspects: la « conservation des abscisses » et la« conservation du rapport de projection » suivant que, dans l'écriture de chaque rapport, nous considérons les segments choisis sur la même sécante ou sur les deux sécantes.

- Figure « triangle »

La figure caractéristique de Thalès dans un triangle semble être statique, alors qu'elle cache deux dynamiques qui ont pu la faire naître [10] :

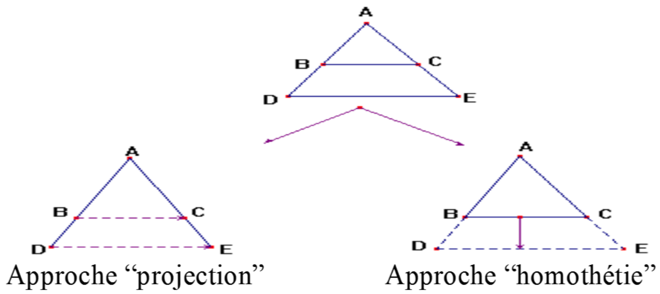

Fig. 1. Figure « triangle ».

L'approche "homothétie" propose des égalités de rapports relatives à deux triangles semblables : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$

En écriture vectorielle, elle est définie par la relation : si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AD}$ alors $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DE}$

Brousseau [9] distingue deux cas dans l'aspect « projection » suivant que dans chaque rapport, on choisit les longueurs des segments d'une même droite ou celles d'une droite et de leurs images sur l'autre droite (Figures 2 et 3)

- La conservation des abscisses sur les sécantes

Cette approche exprime que le rapport des mesures algébriques (ou des distances) des segments portés par une sécante est égal au rapport des segments correspondants portés par l'autre sécante

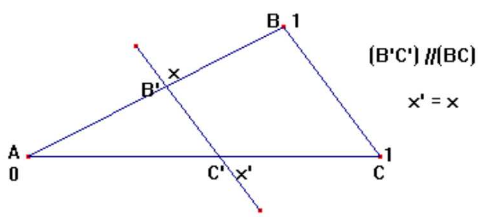

Fig. 2. Conservation des abscisses sur les sécantes.

Les droites (AB) et (AC) sont graduées. Le point A est d'abscisse 0. C'est une origine commune pour les deux droites, alors que les points B et C (d'abscisse 1 chacun) sont les points unitaires sur les deux droites. Les réels x et x' désignent respectivement les abscisses de B' et C', et la "conservation des abscisses" est définie par l'égalité: x = x'.

Nous avons : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$

En écriture vectorielle : si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AB'}$ alors $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AC'}$

- La conservation du rapport de projection

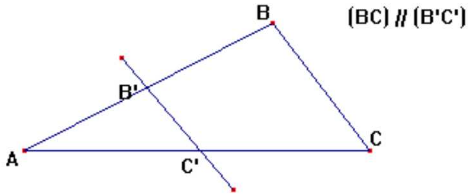

Fig. 3. Conservation du rapport de projection.

Cette approche rejoint la précédente en considérant des segments sur les deux sécantes. La différence entre les deux se situe au niveau de la correspondance choisie. Dans cette approche, nous avons l'égalité des rapports entre les distances des segments correspondants déterminés sur les deux sécantes.

Nous avons $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$

A côté de la figure triangle, deux autres catégories de figure peuvent caractériser le théorème de Thalès :

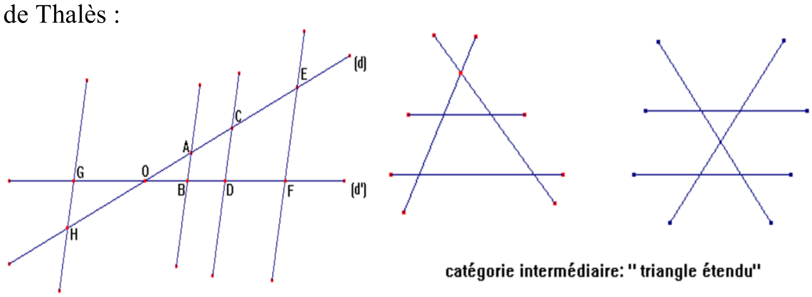

Fig. 4. Figure « parallèles et sécantes » et Figure « triangle étendu ».

Dans chacune de ces figures, nous pouvons avoir des écritures de type : « conservation des abscisses » ou « conservation du rapport de projection ».

4.3 Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien

Dans l'enseignement tunisien, les trois domaines : géométrie élémentaire, géométrie des transformations et géométrie analytique coexistent au collège et au lycée.

- En 7e et 8e de base, utiliser les transformations dans certaines séquences déductives est d'un niveau cognitif élevé pour des enfants de 13 - 14 ans.

- En 8e de base, on introduit la symétrie centrale simultanément par ses caractères fonctionnel et global.

- Au lycée, le passage au vectoriel occulte le travail de la géométrie élémentaire, et le recours à la figure est rare.

Pour ce qui concerne le théorème de Thalès, il est enseigné sur trois niveaux : en 9ème année de base (dernière année du collège), et en 1ère et 2ème année du lycée.

Dans le manuel de 9ème année de base, il existe trois énoncés du théorème de Thalès qui relèvent de l'axiomatique euclidienne mais avec deux points de vue différents. Dans la partie « cours » le point de vue des transformations est dominant alors que dans les « exercices » c'est le point de vue euclidien qui est le plus utilisé avec un énoncé de type « homothétie ». Les différents types de figures coexistent mais les énoncés de type « conservation des abscisses » ou « conservation du rapport de projection » n'apparaissent qu'avec des figures de type « parallèles et sécantes » et profitent de la notion de projection sur une droite selon une direction donnée qui apparaît au chapitre 10 intitulé « Repérage dans le plan ». Au triangle n'est associé que l'énoncé de type « homothétie ». Il est clair que dans ce manuel, le couple (énoncé, figure) traduit un point de vue spécifique.

Par rapport au manuel de 9ème année de base, le manuel de 1ère année secondaire de 2003 redonne vie à l'approche « homothétie » dans le sens direct du théorème de Thalès. D'ailleurs, nous pouvons dire que, c'est quasiment la seule approche mobilisée dans les activités, dans la partie relative aux énoncés des théorèmes et dans les exercices de fin de chapitre, soit partiellement par l'utilisation de l'égalité qui coïncide avec la conservation des abscisses, soit par l'utilisation des côtés parallèles. En deuxième année secondaire, nous notons la présence d'un énoncé vectoriel du théorème de Thalès, dans une figure relative à un triangle.

Dans le manuel tunisien de 2ème année secondaire (de 2005), le théorème de Thalès est introduit dans un cadre vectoriel, Il est énoncé comme suit :

Soit ABC un triangle et M un point de (AB), distinct de A.

La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$

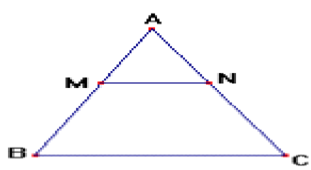

Fig. 5. Enoncé de Thalès dans le manuel de 2ème année.

Nous avons parcouru les chapitres du manuel pour voir les moments éventuels d'utilisation du théorème de Thalès, et avons regardé en particulier la façon d'introduire la propriété $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$, qui pourrait faire appel au théorème de Thalès. Nous avons remarqué que cet énoncé, indépendamment de son lien avec les énoncés étudiés en 9ème année de base et en 1ère année secondaire, n'a pas de vie ultérieure et en particulier, il ne contribue pas à élaborer les propriétés du calcul vectoriel. En général, dans les manuels tunisiens de 1ère et de 2ème année secondaire, lorsque les vecteurs sont introduits, un recours assez rapide est fait aux outils puissants du calcul vectoriel, sans faire le lien avec les thèmes fondamentaux de la géométrie classique du collège, tels que le théorème de Thalès. Le passage des distances aux vecteurs, n'est pas considéré comme un point qui mérite d'être soulevé.

5 Etude expérimentale

Pour répondre à la question des difficultés de passage de la géométrie ponctuelle à la géométrie vectorielle, nous proposons à des élèves tunisiens de 2ème année secondaire, deux tests qui ne diffèrent que par le type d'énoncé : dans l'un les énoncés sont formulés à l'aide des distances et dans l'autre à l'aide des vecteurs. Nous cherchons à voir les différences de traitement et de réussite de ces tests par les élèves. Pour consolider notre travail, nous choisissons le système d'enseignement français comme point de comparaison et ainsi, proposons les mêmes tests à des élèves français des classes de seconde

5.1 Choix des élèves

En Tunisie, nous avons choisi des élèves de trois classes de 2ème année secondaire. Ces classes comptent 30, 31 et 33 élèves. Nous avons au total 94 copies. Deux de ces trois classes ont le même enseignant. Les deux enseignants ont jugé « moyen » le niveau de chaque classe. Notons que la 2ème année secondaire en Tunisie est la dernière classe du tronc commun. Les élèves de cette classe peuvent s'orienter en fin d'année vers une des cinq branches dont une appelée « branche des mathématiques » et une « littéraire ».

En France, nous avons choisi des élèves de trois classes de 2nde, une à Paris et les deux autres dans la banlieue de Paris. Les classes comptent 28, 30 et 33 élèves. Nous avons au total 91 copies françaises. Deux de ces trois classes ont également le même enseignant. Les deux enseignants ont jugé « moyen » le niveau de chaque classe. En France, comme en Tunisie, la 2nde est la dernière classe du tronc commun.

5.2 Choix du moment du test

Dans le choix du moment de passation de ce test, nous avons voulu neutraliser autant que possible l'effet des thèmes de géométrie que les élèves ont étudiés durant l'année du test et les années précédentes. Pour que les élèves soient dans des conditions aussi proches que possible, nous avons choisi de placer ce test après les leçons sur le théorème de Thalès et les vecteurs et avant l'introduction de l'homothétie et du barycentre. Il était important aussi de choisir un moment où les élèves des deux systèmes scolaires se sont exercés sur les vecteurs durant une période équivalente.

5.3 Le déroulement du test

Le test est proposé dans des séances d'une heure. Pour garantir une crédibilité des résultats et éviter les fraudes, les versions A et B ont été construites de manière à ce que les élèves ne reconnaissent pas facilement qu'il s'agissait des mêmes exercices :

- l'ordre des exercices a été changé.
- l'orientation des figures, l'appellation des points et certains rapports de projection ont été changés.
- dans la distribution des copies, nous avons donné à deux élèves voisins deux versions différentes du test. Pour analyser de près la problématique du passage au vectoriel, nous avons proposé aux élèves des deux pays un test sous deux versions : l'une avec distances, l'autre avec vecteurs. Les deux versions du test proposé ne diffèrent que du point de vue de la forme des énoncés. Les figures étant les mêmes, nous pouvons donc lier les différences éventuelles dans les réponses des élèves à l'influence du type d'énoncé utilisé qui dépend lui-même du programme de chaque pays.

L'objectif principal de ce test est donc de répondre aux interrogations suivantes : existe-t-il une rupture chez les élèves, entre les deux formes possibles du théorème de Thalès. Ce théorème, le plus souvent rencontré dans sa présentation utilisant des distances, est-il reconnu dans les situations vectorielles ?

5.4 Les énoncés du test

<u>Énoncé 1 (test B, avec distances)</u>

Dans la figure ci-contre, EFGH est un parallélogramme, les droites (KL) et (FG) sont parallèles, les droites (IJ) et (EF) sont parallèles.

Le point P est tel que $EP = \frac{3}{5} EG$

1) Exprimer EP à l'aide de PG
2) Trouver un réel m tel que PI = m PJ
3) Montrer que PK = m PL
4) En déduire que les droites (IK) et (JL) sont parallèles.

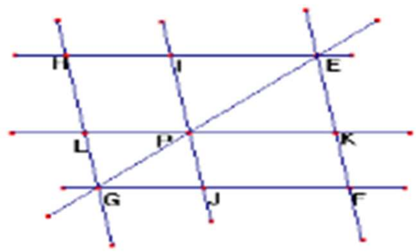

Fig. 6. Test B, avec distances.

Énoncé 2 (test A, avec vecteurs)

Dans la figure ci-contre, ABCD est
un parallélogramme, les droites (KL) et (BC) sont parallèles, les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.

Le point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AC}$

1) Exprimer $\overrightarrow{MA}$ à l'aide de $\overrightarrow{MC}$
2) Trouver un réel a tel que $\overrightarrow{MI} = a\overrightarrow{MJ}$
3) Montrer que $\overrightarrow{MK} = a\overrightarrow{ML}$
4) En déduire que les droites (IK) et (JL) sont parallèles

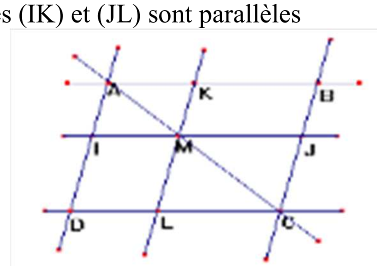

Fig. 7. Test A, avec vecteurs.

Consultons des entretiens que nous avons tenus avec les enseignants des classes visitées dans le but d'éclairer les pistes que les élèves pourraient suivre dans leurs réponses, auxquels nous avions posé la question suivante :

« Est-ce que vous vous attendez à une (ou à des) différence(s) dans la manière de résoudre les exercices du test A et du test B ? Si oui, préciser laquelle (lesquelles), si non, préciser ce qui vous fait penser qu'il n'y a pas de différence ».

Les remarques suivantes apparaissent à travers leurs réponses :

- Tous les enseignants (des deux pays) ont prévu que les élèves réussiraient plus facilement la version « distance », la version « vecteur » risque de les désorienter.

- Les enseignants tunisiens pensent qu'il serait difficile aux élèves de reconnaître une situation de Thalès utilisant les vecteurs, et qu'ils s'engageront dans un calcul vectoriel en utilisant la relation de Chasles. Un enseignant précise que : Il leur est difficile d'appliquer le théorème de Thalès avec des parallélogrammes. La version « vecteur » sera complètement ratée. Chez les élèves, le théorème de Thalès ne sera pas reconnu avec les vecteurs ».

Un enseignant français fait la même remarque et qu'en l'absence d'un énoncé vectoriel du théorème de Thalès, les élèves ne seront pas en mesure de produire des démonstrations commodes et rigoureuses.

Une deuxième question a été posée aux enseignants :

« Quelles procédures, propriétés utilisées, difficultés et erreurs, attendez-vous dans chacune des deux versions du test ? ».

Dans leurs réponses, les enseignants tunisiens prévoient des erreurs dans la version « distance » dans le choix des rapports (rapports faux) dus à un mauvais choix de figure. Ils prévoient aussi beaucoup de non réponses dans la version vectorielle.

Les deux enseignants français s'accordent autour d'une même idée : dans la version vectorielle, certains élèves peuvent donner des démonstrations hybrides où ils mêlent les calculs avec distances et avec vecteurs. Certains types d'erreurs dans ce sens sont cités comme exemple : l'utilisation de la colinéarité des vecteurs, avec des justifications de type Thalès classique, ou des égalités de type : un vecteur = un nombre.

L'un de ces deux enseignants prévoit deux types de réponses :

- Le passage à Thalès classique par l'utilisation des critères de : direction, sens et norme.
- une utilisation intuitive et non justifiée de Thalès vectoriel.

5.5 Les résultats du test

Cette expérimentation montre que pour les deux versions « distance » et « vecteur » ne sont pas également représentatives du théorème de Thalès et que le passage de l'une à l'autre ne va pas de soi pour les élèves. En majorité, ces derniers choisissent de résoudre l'exercice qu'ils ont en restant dans la version proposée ou suggérée par l'énoncé, même si leurs connaissances dans cette version ne leur permettent pas d'aboutir au résultat.

Dans ce qui suit, nous rappelons les différents résultats dégagés à partir du test dans les deux versions et dans les deux pays :

Des points communs

- L'énoncé Thalès-vectoriel n'est pas disponible chez les élèves. Pour les élèves tunisiens ou français, cet énoncé n'est pas cité dans les programmes comme objet d'enseignement. Dans le manuel tunisien de 2ème année secondaire, une petite place lui est accordée. Il apparaît rapidement dans une activité du chapitre 5 « Calcul vectoriel » puis disparaît aussitôt. L'un des enseignants de l'une des classes tunisiennes auxquelles le test avait été soumis nous a signalé n'avoir pas abordé cette activité dans son cours, alors que l'autre enseignant l'avait traité rapidement. Pour les élèves français, cet énoncé est inexistant dans certains manuels que nous avons consultés. Les enseignants des classes françaises visitées confirment que le Thalès-vectoriel n'est pas connu des élèves.

Dans l'enseignement actuel, les vecteurs, introduits de façon peu formelle, à partir des notions : direction, sens et longueur d'un segment, rendent naturel le Thalès-vectoriel puisque les directions et les sens des segments sont directement vus sur le graphique.

L'intuition chez quelques élèves tunisiens et français leur a permis d'« inventer » le Thalès-vectoriel sans mettre la réponse sous le titre du « théorème de Thalès ». Pour les élèves qui ne sont pas en mesure de faire cette invention, le seul moyen disponible pour eux est de passer aux distances et de retrouver le théorème de Thalès classique. Ce qui suppose déjà que les élèves reconnaissent qu'il s'agit d'une situation de Thalès. Dans la majorité des cas, les élèves se plongent dans un calcul vectoriel qui se substitue au théorème de Thalès et qui s'appuie sur la relation de Chasles.

Certains élèves reconnaissent une situation de Thalès mais sont incapables de passer aux distances pour retrouver l'énoncé qu'ils connaissent. Dans ce cas, des types d'erreurs apparaissent fréquemment, comme le rapport ou le produit de deux vecteurs.

- Dans les deux pays, la version « distance » permet d'avoir un taux de réussite plus élevé que la version vecteur. Avec les vecteurs, les élèves font plus d'erreurs de types divers.
- Dans la version « distance », les élèves font des tentatives de passage des écritures « linéaires » aux rapports de distances, mais ils se confrontent à un passage auquel ils ne se sont pas habitués, avec deux écritures littérales : l'une de type $\mathrm{AM} = k\mathrm{AB}$, l'autre de type $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = k$. Remarquons que dans les manuels tunisiens ou français, les écritures sous forme de proportion sont les plus fréquentes dans les applications liées au théorème de Thalès. Nous pensons, avec Cousin-Fauconnet [11], qu'il faudrait initier les élèves, dans l'apprentissage du théorème de Thalès, à passer d'une écriture sous forme de proportion à une écriture « linéaire » dans le but de les préparer à l'arrivée des vecteurs.

Des points de différence

- En Tunisie, dans la version « vecteur », beaucoup d'élèves ne donnent pas de réponse. Certains élèves tentent de donner une réponse et s'engagent dans un calcul vectoriel en utilisant la relation de Chasles, sans reconnaître qu'il s'agit d'une situation de Thalès. Ils font des erreurs de type : produit ou quotient de deux vecteurs
- En France, les élèves tentent de donner une réponse dans la version « vecteur » et font des erreurs de types divers. Ils utilisent rarement le calcul vectoriel à la place du théorème de Thalès et font surtout des erreurs liées à la forme vectorielle de ce concept. Cette forme, permettant de passer d'une égalité du produit d'un vecteur par un réel à une égalité analogue en considérant les vecteurs images par projection, se réduit pour eux à passer d'une écriture « linéaire » à des proportions.

6 Conclusion

Dans les systèmes tunisien et français, le passage entre deux axiomatiques différentes, définies l'une par la géométrie classique et l'autre par la géométrie vectorielle est supposé comme allant de soi. Avec l'arrivée des vecteurs, l'algébrisation de la géométrie rend peu utile le recours à la figure et aux théorèmes importants du collège dont celui sur le théorème de Thalès sous sa forme classique.

Ce travail nous montre qu'autour du théorème de Thalès, le passage au vectoriel est accompagné de difficultés pour les élèves. Les enseignants des classes de 2ème année secondaire et de seconde visitées confirment que les connaissances disponibles pour les élèves sur le théorème de Thalès classique (avec distance) ne leur permettent pas de traiter une situation de Thalès relevant du vectoriel. Ceci nous renvoie à la question plus générale de la transition entre la géométrie ponctuelle et la géométrie vectorielle qui passe sous silence : en 1ère année secondaire, après plusieurs années de travail dans le domaine de la géométrie ponctuelle le terrain est-il bien préparé pour l'arrivée des vecteurs ? Comment est négocié le passage de la géométrie qui domine au collège, au cadre vectoriel ? Avec ses différentes approches, il nous semble que le théorème de Thalès est un outil propice qui montre que la question du changement d'axiomatique est une piste qui mérite d'être explorée

Références

1. A. Berté, Différents ordres de présentation des premières notions de géométrie métrique dans l'enseignement secondaire, Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol.**15, n°3**, pp 83-130, (1995).

2. S. Mrabet, *Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien : conceptions et pratiques des élèves, pratiques des enseignants*, Thèse de doctorat, Université Virtuelle de Tunis, Université Paris Diderot (Paris 7), (2010).
3. M. Abdeljaouad, Les triangles semblables…ces mal aimés, Miftah al Hissab **96-97**, Tunis, (2001).
4. M. Chasles, *Aperçu historique des méthodes en géométrie*, ed. Gauthier- Villars, Paris, (1889).
5. G. Choquet, L'enseignement de la géométrie, Hermann, Paris, (1964).
6. J. Dieudonné, Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Hermann, (1964).
7. J.C. Rauscher, *Les enjeux de l'enseignement de la géométrie au début du collège et leur prise en compte par les professeurs* in 20 ans de didactique des mathématiques en France, Editions la Pensée Sauvage, (1994).
8. R. Duval, Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repère-IREM n°7. Topiques édition. Pont – à – Mousson, (1994).
9. G. Brousseau, Promenade avec Thalès, de la Maternelle à l'Université. Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle - Autour de Thalès. 87-124, (1995).
10. J.-C. Duperret, Pour un Thalès dynamique. Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle - Autour de Thalès, 125-144, (1995).
11. A. Cousin-Fauconnet, Enseigner la géométrie au collège, Armand Colin, (1995).