ITM Web of Conferences **39**, 01010 (2021) https://doi.org/10.1051/itmconf/20213901010
CIFEM'2020

Que représente le concept d'intégrale définie chez les étudiants à l'entrée à l'université ?

What represents the definite integral concept to students in the first year of university?

Inen Akrouti[1*]

[1]Université Virtuelle de Tunis, ISEFC / Université de Carthage, LaRiNA, Tunisie

Résumé. En Tunisie, les élèves rencontrent le concept d'intégrale définie pour la première fois à la fin du secondaire. Il est introduit à partir de l'aire sous la courbe, défini par le Théorème Fondamental de l'Analyse et appelé, dans l'activité mathématique des élèves, sous forme de primitive. Un retour sur le manuel scolaire permet de remarquer que les méthodes d'approximations sont quasi absentes sauf peut-être dans quelques exercices de fin du chapitre. Ces choix institutionnels influencent le travail des élèves et dirigent l'activité mathématique qu'ils entreprennent vers des choix spécifiques [1]. Par ailleurs, ils pourraient amener plus tard les étudiants à développer des interprétations particulières de l'intégrale définie [2]. Dans cet article, nous envisageons de développer cette idée par l'étude de l'impact des choix institutionnels sur les conceptions des étudiants à l'entrée à l'université avant le nouveau cours d'intégration. Notre analyse s'appuie sur la typologie de conceptions développée par Jones [3]. En fait, ce dernier en a défini quatre types : il s'agit des conceptions d'aire, de primitive, de somme et de limite de somme. Nous nous limitons seulement à trois conceptions, et expliquons les raisons de notre choix.

Abstract. In Tunisia, the definite integral is first met during the end of the secondary school in analysis, the last year of the high school. In the curriculum, this concept is introduced by computing the area under the curve, defined by the Fundamental Theorem of Calculus (FTC) and worked by the antiderivative. The approximation methods are neglected, except the rectangles method, which is applied in solving some problems without theoretical developments in courses. These institutional choices affect students' self-perception and influence their attitude [1]. Moreover, they lead them to develop different interpretations of the definite integral [2]. In this paper, my goal is to identify students' interpretations of the definite integral at the first year of studying science at the university. My analysis is based on the tool developed by Jones [3]. This tool identified fourth categorizations for students' description of the definite integral but we will use only three of them: area, antiderivative, and approximation process.

* Corresponding author : akroutiinen@yahoo.fr

Participants were enrolled in a public university during the first-semester calculus.

1 Introduction

La question de la compréhension de l'intégrale par les étudiants nous parait particulièrement importante car elle sert de base à de nombreuses applications dans de nombreux domaines scientifiques et dans des cours ultérieurs [4,5]. Cependant, une utilisation excessive de certaines interprétations de l'intégrale, telle qu'une « aire sous la courbe », pourrait limiter l'application de l'intégrale à ces domaines [6,7]. Hall souligne que beaucoup d'étudiants interprètent l'intégrale définie et indéfinie, comme « aire », et parfois comme « sommes de Riemann » [8]. Il a mis l'accent sur l'influence du langage informel sur la compréhension des étudiants de l'intégrale. D'autres chercheurs ont mis l'accent sur la conceptualisation des étudiants de l'intégrale comme une somme de Riemann [8,4,6]. Ces études se concentrent sur la façon dont les étudiants relient la somme de Riemann à des concepts comme la limite et comment ces étudiants les utilisent pour résoudre certains problèmes qui relèvent du calcul intégral.

En Tunisie, les élèves rencontrent le concept d'intégrale définie pour la première fois à la fin du secondaire dans le cadre du cours de l'analyse réelle. Le programme officiel préconise de l'introduire à partir de l'aire sous la courbe d'une fonction continue et positive. Puis, le Théorème Fondamental de l'Analyse (TFA) fait le lien d'une part entre intégrale et aire et d'autre part entre intégrale et primitive. Les méthodes d'approximation sont négligées à l'exception de la méthode des rectangles qui est appelée dans quelques exercices de fin du chapitre sans qu'il n'y ait aucun développement théorique relatif dans le cours. Les tâches institutionnelles proposées sont abordées en appliquant les techniques usuelles de la recherche d'une primitive ou la méthode d'intégration par parties. Aucun recours à une autre technique, telle que la représentation graphique de l'intégrale pour solliciter le recours à l'aire, n'a été noté. Dans un travail antérieur, il nous a été possible de souligner que les choix institutionnels ont un impact sur l'activité mathématique des élèves/étudiants : ces choix dirigent le travail vers des méthodes et des techniques particulières [9], et pourraient ainsi être à l'origine de conception particulière de tout objet mathématique, tel que c'est le cas du concept qui nous importe ici : l'intégrale définie. Il nous est paru légitime de nous focaliser sur la question des conceptions de ce concept à l'université : que représente le concept d'intégrale définie à la fin du secondaire chez les étudiants entrant à l'université ?

2 Les considerations théoriques

Notons d'abord que nous acceptons qu'une conception d'un objet mathématique chez un étudiant soit une interprétation développée de cet objet par cet étudiant. En fait, une conception représente une manière particulière de comprendre une notion mathématique. Elle aboutit soit à considérer cette manière comme l'unique forme de connaissance possible, soit à l'utiliser d'une manière abusive dans le répertoire cognitif du sujet. Autrement dit, cette conception serait à la base du raisonnement (juste ou erroné) de l'étudiant à propos du concept en jeux, et également à l'origine des procédures qu'il choisit pour répondre à une question donnée.

Pour la notion d'intégrale, plusieurs chercheurs ont travaillé sur les conceptions des étudiants de l'intégrale définie [10, 11, 12]. Citons Jones [14, 15, 2] qui a distingué quatre types de conceptions définies comme suit :

- La conception d'aire : c'est une conception naïve ou plutôt basique. Elle considère l'intégrale comme l'aire de la surface sous la courbe (fig1). L'intégrale est, dans ce cas, une quantité positive.

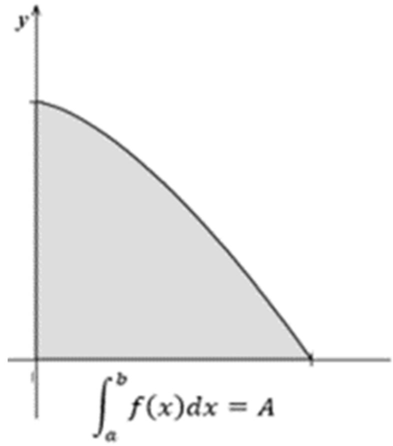


Fig. 1. Conception d'aire.

- La conception de primitive : elle n'aborde le calcul d'intégrale qu'au moyen d'une primitive. Cela signifie que les étudiants cherchent une primitive de la fonction à intégrer puis ils appliquent le Théorème Fondamental de l'Analyse (TFA).
- La conception de somme : Jones [14] souligne que les étudiants ont tendance à interpréter l'ostensif Δx de la somme de Riemann comme s'il a été réduit jusqu'à une taille « infinitésimale », ou une taille « zéro » avant que l'addition n'ait lieu. D'autres comme Czarnocha et ses collaborateurs [15] interprètent cette conception par la « méthode des indivisibles », qui considère l'aire sous une courbe comme la somme des lignes droites qui remplissent l'espace sous-jacent. Il s'agit d'un processus d'addition infinie de lignes ou de portions.
- La conception de limite de somme : L'intégrale est considérée comme un ensemble d'approximations se basant sur l'aire. Cette conception consiste à effectuer des subdivisions très fines de l'intervalle d'intégration pour mettre en œuvre un processus d'approximation puis, à appliquer la limite. Sealey et Sealey & Oehrtman [5, 3] constatent que les étudiants identifient l'intégrale à une somme de Riemann. Cependant, Jones prévoit que cette conception active le processus de limite avant qu'elle n'active celui de somme de Riemann [13].

Dans le cadre de ce travail, nous considérons trois types de conception seulement : conception d'aire, conception de primitive et conception de processus d'approximation. Nous avons fait ce choix car il nous semble qu'il s'agit de la même procédure de produits infinitésimaux pour les conceptions de somme et de limite de somme, soit le processus finit par application de la limite soit il se limite à faire la somme. Nous définissons cette conception comme suit « elle se prête à être imaginée comme la somme de produits de longueur et de largeur de rectangle où l'un des facteurs est un infinitésimal ou une très petite quantité » (p. 53) [15]. La figure ci-dessous représente cette conception :

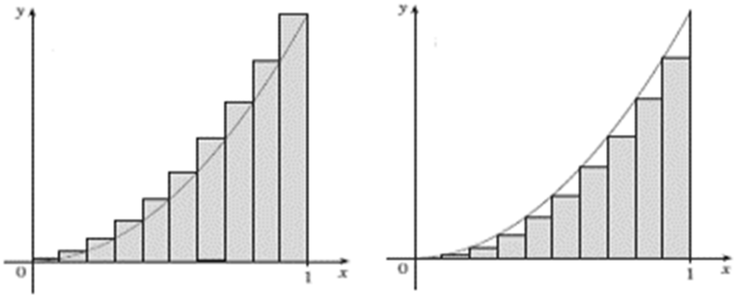


Fig. 2. Conception de processus d'approximation.

Pour affiner notre étude sur les conceptions des étudiants de l'intégrale définie, nous empruntons quelques notions aux travaux de Tall & Vinner [16] et Sfard [17].

Tall et Vinner considèrent que le concept image chez un individu est l'ensemble des structures cognitives associées au concept. Il comprend les processus et les propriétés associés à un tel concept et les images mentales qu'il pourrait inclure : « the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes » (p. 152) [16]. Une image « bien définie » d'un concept mathématique peut être considérée comme la forme ou la structure finale dans laquelle le concept a pris sa place dans le raisonnement d'un individu. Le concept image peut inclure des idées significatives, comme il peut inclure des idées contraires aux significations et aux définitions formelles du concept. Dans certains cas, le concept image peut différer à divers égards du concept formel défini et accepté par la communauté mathématique en général. Tall et Vinner utilisent l'expression « The evoked concept image » pour indiquer les éléments du concept image qui ont été découverts dans les réponses des élèves/étudiants. En bref, notre intérêt est de comprendre les images mentales, les processus et les liens que les étudiants évoqueraient lorsqu'ils abordent le thème d'intégration. Il est important de garder à l'esprit que les étudiants participants à notre étude peuvent posséder des éléments de leurs concepts images qui n'ont jamais été découverts dans leurs réponses.

De son côté, Sfard considère qu'un concept mathématique possède deux statuts : un statut processus et un statut objet [17]. Le premier est lié à l'aspect opératoire de la notion où l'individu se focalise sur les procédures et les actions contenues dans le concept. Le second est lié à l'aspect structural où l'individu considère le concept mathématique comme une entité qui se réfère à elle-même. Sfard rajoute qu'on peut identifier une conception pseudo-structurelle chez quelques-uns lorsque la conception d'objet appelée par ces individus ne fait pas référence aux « niveaux inférieurs » ni aux processus qui ont conduit au développement du concept lui-même. Pour le concept d'intégrale définie, nous considérons son interprétation en tant qu'aire ou une procédure de calcul de primitive est liée à son aspect opératoire alors que l'interprétation en tant que limite d'un processus d'approximation est liée à son aspect structural.

Du point de vue de sa définition formelle introduite à l'université, l'intégrale définie renvoie aux sommes de Riemann par la relation suivante : $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. Cette relation mobilise la conception de processus d'approximation, ce qui met en œuvre les deux aspects : processus et objet, de l'intégrale, et permet ainsi de développer un concept image puissant. Or, il n'y a pas dans l'enseignement secondaire un vrai travail reliant l'intégrale à la somme des aires algébriques et prenant en compte le passage à la limite. L'introduction de la relation de Chasles met en œuvre l'additivité des aires algébriques, ce qui pourrait amener à renforcer la conception d'aire et évoque un concept image mal structuré. Enfin, nous pouvons considérer que le calcul de primitives, qui est en quelque sorte « réifié » dans la formule $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, pourrait mobiliser une conception de primitive et solliciter l'un des aspects opératoires de l'intégrale. Par la suite, il évoque un concept image limité.

A partir des outils théoriques que nous avons développés, nous pouvons reformuler nos questions de recherche :

Quelles sont les conceptions des étudiants sur l'intégrale définie à l'entrée à l'université ? Quels sont les aspects de l'intégrale définie appelés par les conceptions ainsi identifiées ?

3 Méthodologie

Le questionnaire que nous avons proposé n'est ni pour évaluer les connaissances des étudiants ni pour provoquer des apprentissages. Il a pour objectif de recueillir des données concernant la conception (l'interprétation) des étudiants du concept d'intégrale définie. Notre ambition est d'aller au-delà des réponses justes ou fausses, et au-delà des erreurs identifiées chez les étudiants et d'essayer de regarder les images mentales que les étudiants pourraient activer en répondant aux questions. Nous envisageons voir comment les étudiants interprètent ce concept et comment ils le mettent en œuvre quand il s'agit de son application. Ce sont ces considérations qui nous ont amenées à proposer ce questionnaire aux étudiants à l'entrée à l'université et avant qu'ils n'abordent le nouveau cours d'intégration.

Le questionnaire est proposé à des étudiants qui sont supposés connaître les méthodes de calcul d'intégrale définie : le calcul au moyen d'une primitive, le calcul par la méthode d'intégration par parties, le calcul approché d'intégrales (méthodes des rectangles), la valeur moyenne et inégalité de la moyenne. Ils sont supposés également connaître la relation de Chasles, le Théorème Fondamental de l'Analyse et avoir suffisamment manipulé les propriétés algébriques et géométriques de l'intégrale définie. Donc ces étudiants sont supposés possédant un ensemble de connaissances qui leur permet de fournir leurs propres significations de l'intégrale définie.

Le questionnaire a été soumis deux fois à des étudiants en première année Licence Fondamentale en Mathématiques (LFM) à la faculté des sciences de Bizerte (FSB) en Tunisie pendant les années universitaires 2016/2017 et 2017/2018. Le questionnaire est proposé aux étudiants pour une durée de 45 mn sous la surveillance de l'enseignant. Il est proposé uniquement aux nouveaux bacheliers pour répondre à notre besoin de se focaliser sur les conceptions des étudiants avant qu'ils n'abordent le nouveau cours d'intégration à l'université. Nous avons rassemblé les réponses recueillies pendant les deux années car les programmes en fin du secondaire n'ont pas changé et avons finalement recueilli au total de 35 traces écrites sur lesquelles se base notre analyse.

Le questionnaire est composé de cinq questions. Dans ce travail nous nous limitons seulement à trois, réparties de la manière suivante : nous interrogeons les étudiants sur leur conception de l'intégrale dans la première question en l'absence de tout contexte théorique, puis nous interrogeons, dans la deuxième question, sur ce que pourrait évoquer la définition formelle chez les étudiants du point de vue de leur interprétation personnelle, ensuite nous proposons une question sur le calcul intégral pour voir la nature des conceptions que les étudiants évoquent effectivement dans leur activité mathématique. Notons que notre analyse se base sur les traces écrites recueillies.

Le questionnaire est présenté comme suit :

$\boldsymbol{Q_1}$: Ecrire en un seul mot, ce que vous pensez lorsque vous entendez le mot « intégrale ». Expliquer en quelques mots votre réponse.
$\boldsymbol{Q_2}$: Donner la définition du nombre $k = \int_a^b f(x)dx$.
$\boldsymbol{Q_3}$: Soit f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \begin{cases} f(-1) = 0. \\ 1 \; si \; x \in \;]-1,1[\\ f(1) = 0 \end{cases}$. Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

4 Analyse a priori

En nous basant sur notre idée de concevoir la répartition des conceptions relative à l'intégrale soulignée plus haut, nous nous attendons à observer chez les étudiants les trois conceptions suivantes : conception d'aire, conception de primitive et peut-être conception de processus d'approximation.

La démarche que nous avons suivie pour l'analyse a priori comporte les réponses attendues de la part des étudiants ainsi que toutes les réponses envisageables.

4.1 La première question

Q1 : Ecrire en un seul mot, ce que vous pensez lorsque vous entendez le mot « intégrale ». Expliquer en quelques mots votre réponse.

Le but de cette question est de se rendre compte de ce que le terme « intégrale » évoque chez les étudiants en l'absence de tout contexte théorique et/ou pratique. Dans la mesure où la question devrait confronter l'étudiant seulement à sa propre conception de la notion d'intégrale, il ne peut puiser que dans l'ensemble des représentations de son répertoire personnel. Ce faisant, on peut envisager que ce terme renvoie, suivant chaque étudiant, aux notions d'aire, de primitive, de fonction, de nombre et peut-être à d'autres notions. Il y a lieu aussi d'envisager que certains étudiants ne répondent pas à cette question.

4.2 La deuxième question

Q2 : Donner la définition du nombre réel :

$$k = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

L'approche institutionnelle utilisée pour enseigner l'intégrale définie met en œuvre le lien entre intégrale et primitive d'une part et intégrale et aire d'autre part. Pour cela, la réponse à cette question pourrait révéler différentes conceptions chez les étudiants.

En plus, dans une étude antérieure sur l'enseignement de l'intégrale à la fin du secondaire, Akrouti [18] souligne que l'enseignement de l'intégrale définie semble focaliser sur le statut processus. En fait, la notion d'intégrale est présentée comme un prolongement de la notion de primitive.

Nous nous attendons à ce que les étudiants se basent sur le TFA pour donner une signification à l'intégrale. En effet, ils pourraient penser tout d'abord à la recherche d'une primitive, puis à appliquer ce théorème. Ces étudiants considèrent que la notion d'intégrale renvoie à la recherche de primitives. Il s'agirait alors d'une conception de primitive.

D'autres étudiants pourraient penser que l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire sous la courbe limitée par l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Implicitement, ils considèrent que f est une fonction positive et que $a < b$. Il est possible qu'ils n'aient pas la

conscience que la fonction f devrait être positive dans le cas d'aire [1]. Dans ce cas, les étudiants identifient l'intégrale à l'aire. Il s'agirait d'une conception d'aire.
Nous prévoyons également que l'une des réponses possibles pourrait interpréter l'intégrale définie comme un processus d'approximation bien que la formule suivante : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ n'ait pas été encore enseignée. Notre raison est que la méthode de rectangles a été abordée dans quelques exercices. Par la suite, les étudiants pourraient envisager l'encadrement de l'intégrale définie par deux suites adjacentes.

4.3 La troisième question

Q3 : Soit f définie sur [-1,1] par :

$$f(x) = \begin{cases} f(-1) = 0 \\ 1 \; si \; x \in]-1,1[\\ f(1) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Cette question a été choisie pour son caractère non-standard. Notre idée est de mettre les étudiants face à des tâches où il y a la possibilité de rompre avec l'usage automatique des techniques appliquées au lycée. Notre ambition est de voir si, dans certains cas du calcul intégral, les étudiants peuvent utiliser des méthodes autres que le calcul de primitives. Ce type de questions met en œuvre la possibilité de passer de la représentation initiale (la formule algébrique de l'intégrale donnée) évoquée dans le texte de l'énoncé vers une autre plus « fonctionnelle ». L'utilisation de la représentation graphique de la fonction constitue une méthode plus simple. Nous nous attendons à ce que l'une des réponses possibles consiste à remarquer que l'aire est égale à l'intégrale puisque f est positive. Par ailleurs, l'intégrale est égale à la valeur de l'aire du rectangle hachurée qui est 2 comme le montre la figure ci-dessous. Cette réponse sollicite la conception d'aire.

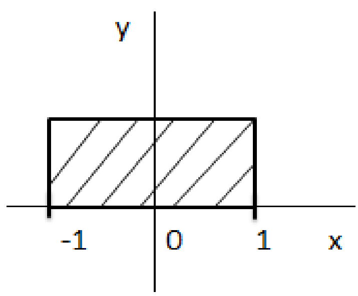


Fig. 3. La réponse à la question Q3 en termes d'aire.

Or, en raison de la routinisation de la technique de recherche d'une primitive, nous nous attendons à ce que la majorité des étudiants procède à un calcul algébrique et donne la réponse suivante : $\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = 2$. Ceci met en évidence les faiblesses que pourrait comprendre un projet d'enseignement, quand les choix se focalisent essentiellement sur quelques techniques dans le registre algébrique. Ce choix sollicite la conception de primitive.

Il est important de noter que les réponses dans le registre algébrique (via le calcul de primitive), pourraient s'expliquer aussi par une «économie de travail». C'est que la réponse via la primitive pourrait paraitre, pour certains étudiants, moins couteuse qu'une réponse utilisant le calcul d'aire, qui, elle, demande une représentation graphique et une justification.

D'ailleurs, Akrouti [15] souligne que beaucoup d'étudiants pensent que les procédures algébriques sont plus utiles pour travailler les tâches proposées lorsqu'il s'agit des intégrales.

4 Analyse a posteriori

Dans cette partie, nous analysons pour chaque question les réponses recueillies : il s'agit d'identifier la nature de la réponse et la conception qu'elle peut révéler. Notre analyse se base sur deux dimensions : quantitative et qualitative d'un point de vue global et d'un point de vue local.

4.1 La première question

Les réponses recueillies sont présentées dans le tableau ci-dessous :

Table 1. La réponse des étudiants à la première question Q1.

Réponse	Aire	Primitive	Calcul	Intégrale	Nombre	Pas de réponse
Nombre de réponses	14	11	4	3	1	2
Pourcentage	40%	31%	11%	9%	3%	6%

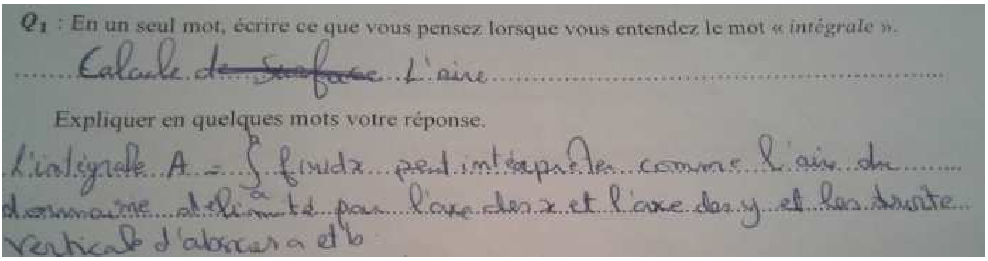
L'analyse des traces écrites des étudiants nous a permis de faire les constatations suivantes :

- Un nombre conséquent d'étudiants interrogés considère l'intégrale définie comme l'aire sous la courbe d'une fonction donnée. Cette catégorie représente à peu près un taux de 40%.
- Une deuxième catégorie, représentant à peu près un taux de 31%, est constituée d'étudiants pour qui, le terme « intégrale » renvoie à la notion de primitive. Ils se rappellent de la primitive chaque fois que l'intégrale est évoquée.
- Une troisième catégorie, représentant 11%, considère l'intégrale définie comme un calcul (sans expliquer quoi calculer).
- Trois étudiants, soit à peu près 9%, ont écrit le mot « intégrale ». Nous considérons cette réponse comme un impact du langage informel sur l'interprétation des étudiants de l'intégrale définie.
- Enfin, nous avons obtenu une réponse qui considère l'intégrale comme un nombre.

Ces résultats montrent que les étudiants ne conçoivent pas l'intégrale définie de la même façon. Les représentations mentales diffèrent d'un étudiant à un autre.

Voyons de plus près quelques traces écrites que nous avons choisies.

La première catégorie considère l'aire comme la représentation graphique de l'intégrale définie. Elle considère la fonction à intégrer comme une fonction positive.


Q_1 : En un seul mot, écrire ce que vous pensez lorsque vous entendez le mot « *intégrale* ».

Calcule ~~de surface~~ L'aire

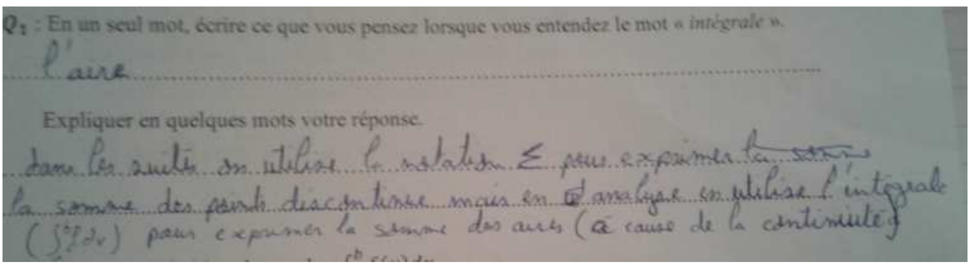
Expliquer en quelques mots votre réponse.

l'intégrale A = ∫ f(x)dx peut interpréter comme l'aire du domaine délimité par l'axe des x et l'axe des y et les droite vertical d'abscisse a et b

Fig. 4. Une réponse en termes d'aire.

Bien que cette réponse relie l'intégrale à l'aire, elle inclue l'axe des « y » pour définir le domaine sur lequel la fonction est intégrée. Le concept image de cet étudiant comprend des confusions.

Pour cette conception, nous avons choisi une autre réponse :


Q_1 : En un seul mot, écrire ce que vous pensez lorsque vous entendez le mot « *intégrale* ».

l'aire

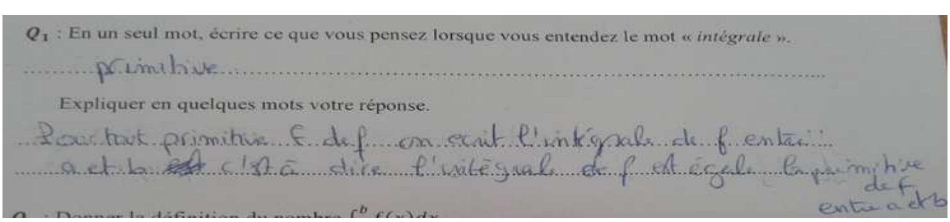
Expliquer en quelques mots votre réponse.

dans les suites on utilise la notation Σ pour exprimer ~~la somme~~ la somme des points discontinue mais en analyse on utilise l'intégrale (∫f dx) pour exprimer la somme des aires (à cause de la continuité)

Fig. 5. Une réponse en termes de processus d'approximation.

Pour cet étudiant, $\int_a^b f(x)dx$ est une notion utilisée dans l'analyse pour exprimer les sommes continues. Alors que le symbole Σ est utilisé pour exprimer les quantités discrètes telles que les suites. Ici, la structure qui relie la somme à l'intégrale est présente intuitivement. L'étudiant est conscient que ces deux objets mathématiques sont de natures différentes (l'une est continue, l'autre est discrète). Bien que le concept image évoqué comprenne quelques images mentales sur la composition de la structure de l'intégrale, ces images ne sont pas bien enracinées dans le répertoire cognitif de l'étudiant et présentent des flous et des ambiguïtés.

Les étudiants ayant une conception de primitive, identifient l'intégrale à la primitive. Quelques-uns parmi eux considèrent l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ comme une écriture mathématique (simple notation) de la notion de primitive comme le montre la figure ci-dessous.


Q_1 : En un seul mot, écrire ce que vous pensez lorsque vous entendez le mot « *intégrale* ».

primitive

Expliquer en quelques mots votre réponse.

Pour tout primitive F de f on écrit l'intégrale de f entre a et b c'est à dire l'intégrale de f est égale la primitive de f entre a et b

Fig. 6. L'intégrale est une représentation formelle de la notion de primitive.

Pour d'autres, c'est un moyen efficace pour calculer des primitives ! Pour cette catégorie, il y a une confusion entre intégrale définie (qui est un nombre) et primitive qui est une fonction comme le montre la figure 7.

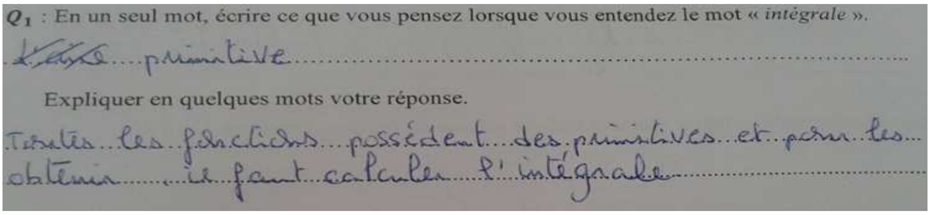

Q_1 : En un seul mot, écrire ce que vous pensez lorsque vous entendez le mot « *intégrale* ».
primitive
Expliquer en quelques mots votre réponse.
Toutes les fonctions possèdent des primitives et pour les obtenir il faut calculer l'intégrale

Fig. 7. Une technique pour calculer une primitive.

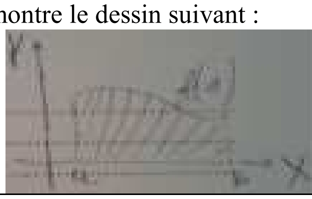
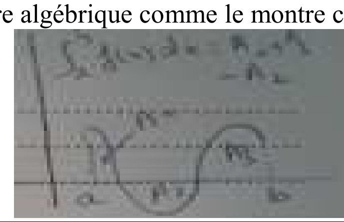
Pour les étudiants qui ont donné une réponse sous forme de calcul, nous considérons qu'ils conçoivent l'intégrale dans son aspect opératoire (calcul d'aire, de primitive entre les bornes d'un intervalle…). Ces conceptions limitent les images mentales et amènent l'étudiant à favoriser des méthodes procédurales, plutôt que celles qui développent des connaissances conceptuelles.

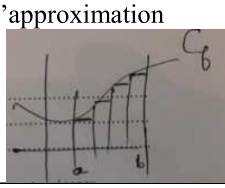
Pour l'étudiant qui a donné la réponse « un nombre », il semble reprendre la définition introduite en fin du secondaire. Cette définition propose l'intégrale comme suit : « *on appelle le nombre réel k l'intégrale de …* ».

4.2 La deuxième question

La réponse à cette question est liée à l'interprétation de la définition formelle de l'intégrale définie par chaque étudiant. Il s'agit pour nous de recueillir des données permettant d'élucider quelques questions sous-jacentes : quelles interprétations pourraient évoquer les étudiants sur l'intégrale définie ? Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des résultats obtenus :

Table 2. Les réponses des étudiants à la question Q2.

Type de réponses	Nombre d'étudiants	Conception
C'est l'aire limitée par la courbe de f, les deux droites d'équation $x = a$, $x = b$ et l'axe des abscisses comme le montre le dessin suivant : 	2	Aire
K représente l'aire sous la courbe limitée par les deux droites $x = a$, $x = b$ et l'axe des abscisses.	11	Aire
C'est l'aire algébrique comme le montre cette figure : 	1	Aire algébrique
$\int_a^b f(x)dx = k = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$.	8	Primitive
Si f est une fonction continue alors $\int_a^b f(x)dx = k = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$ avec $F' = f$.	1	Primitive

$\int_a^b f(x)dx = k = F(b) - F(a)$ est une aire qui peut se calculer par la méthode des rectangles.	2	Processus d'approximation
Elle représente une aire qu'on peut approcher par une somme infinie d'aires de rectangles comme le montre la figure suivante : 	1	Processus d'approximation
C'est un nombre réel.	1	Autre
C'est l'intégrale de la fonction f entre a et b.	2	Autre
C'est un ensemble d'approximation qui finit par calcul de limite.	1	Processus d'approximation
C'est l'aire de la partie du plan sous la courbe de f qu'on peut approcher à la limite de la somme des aires des rectangles d'approximation 	1	Processus d'approximation
$k = \int_a^b f(x)dx$ est la définition de l'intégrale définie.	3	Autre
C'est une intégrale ou une aire.	1	Autre

Une première lecture du tableau indique que le grand nombre d'étudiants (40%) considère l'intégrale définie comme l'aire sous la courbe. Or cette interprétation n'est pas toujours vraie, il suffit que la fonction ne soit pas positive (négative ou elle change de signe). La conception des étudiants de cette catégorie, qui identifient l'intégrale à l'aire, nous parait généralement due à une insuffisance dans les choix institutionnels :

« *En l'absence du recours aux méthodes d'approximation mettant en application les sommes de Riemann et permettant de réifier un processus de sommation (infinitésimal) en le symbole $\int_a^b f(x)dx$, on obtient une conceptualisation largement déconnectée du calcul des grandeurs (en particulier des aires* » (p. 619) [19].

Le concept image de cette catégorie présente des confusions. Il nécessite des abstractions et des reconstructions supplémentaires afin de traiter avec succès une telle situation. Par ailleurs, il convient de dire que les connaissances développées sont d'ordre pseudo-structurel [20].

Le tableau indique également que 25% des étudiants considère l'intégrale définie comme un calcul de primitives et mettent ainsi en œuvre la conception de primitive. Cette conception sollicite l'aspect opératoire de l'intégrale et met en avant son statut processus. Par la suite, ces étudiants se focalisent sur les procédures et les algorithmes contenus dans le concept. Cette conception est suffisante pour aborder certaines situations où le calcul de primitive est possible. Mais dans d'autres cas, elle est insuffisante car les étudiants pourraient se bloquer face à des fonctions continues qui n'ont pas de primitives explicites telles que la fonction de Gauss : $x \to e^{x^2}$ que les étudiants rencontrent dans des cours de probabilité.

D'autres étudiants (14%) considèrent l'intégrale définie comme un processus d'approximation. Cette conception permet aux étudiants de saisir la signification de l'intégrale définie, non seulement en tant que processus, mais également en tant qu'objet. Par la suite, les étudiants de cette catégorie sont considérés comme ayant acquis les deux statuts « processus » et « objet » de la notion d'intégrale.

Bien que la complémentarité processus/objet soit acquise par les étudiants pour cette conception, elle se limite aux cas des fonctions positives et par conséquent, elle pourrait mettre les étudiants en difficulté lorsqu'il s'agit des cas des fonctions négatives ou nulles.

L'étudiant, qui considère l'intégrale définie comme « un nombre réel », n'a pas une représentation mentale personnelle lorsque le concept d'intégrale définie est suscité. Il répète simplement ce qui est proposé dans la question.

Pour les étudiants qui n'ont pas donné de réponses, nous considérons qu'ils n'ont aucune structure cognitive de la définition formelle du concept d'intégrale.

Dans tous les cas identifiés, ces résultats témoignent qu'il existe des conceptions peu fécondes, qu'il faut étudier si l'on veut se faire une approche cohérente pour l'enseignement de l'intégrale.

4.3 La troisième question

Toutes les réponses recueillies sont présentées au tableau ci-dessous :

Table 2. Les réponses des étudiants à la question Q3.

Type de réponses	N. d'étudiants	Conception
L'aire du rectangle de longueur 2 et de largeur 1.	5	Aire
$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} 1dx = [x]_{-1}^{1} = F(1) - F(-1) = 0 - (-1) = 1 + cte.$	3	Primitive
$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = (F(0) - F(-1)) + \big(F(1) - F(0)\big) = 0.$	2	Primitive
$\int_{-1}^{1} f(x)dx = [x]_{-1}^{1} = 2.$	5	Primitive
$\int_{-1}^{1} f(x)dx = F(1) - f(-1).$	13	Primitive

Nous avons recueilli vingt-huit réponses et sept copies sans réponse. L'analyse faite nous a permis de constater que les étudiants ont utilisé l'une des procédures décrites ci-dessous :

- Procéder d'abord par une recherche de primitive sur l'intervalle [-1,1] puis appliquer le Théorème Fondamental de l'Analyse sans que cela ne les conduise forcément à la réussite. Remarquer que la conception de primitive qui est majoritairement entreprise par les étudiants. Cette catégorie représente environ 65% des étudiants interrogés.
- Procéder par un calcul d'aire. Il est question d'étudiants ayant considéré que la valeur de l'intégrale cherchée est égale à l'aire du rectangle de longueur 2 et de largeur1. Ces étudiants ont transformé le problème d'un contexte algébrique à un contexte graphique/géométrique. Le passage de la notion d'intégrale à la notion d'aire a permis aux étudiants de donner une réponse correcte en toute sécurité. Le nombre d'étudiants dans cette catégorie est assez réduit (14%).

Bien que le développement de la conception d'aire par les étudiants dans les deux questions précédentes soit important, nous soulignons le nombre réduit d'étudiants ayant utilisé l'aire dans leurs réponses à la troisième question. Les étudiants sont habitués à des tâches à caractère répétitif qui nécessitent l'acquisition par simple mémorisation de quelques techniques et procédures. Ce type de questions les met face à l'insuffisance des méthodes standards. Ce point est évoqué par Ghedamsi et Tanazefti [21] : « […], *l'appui sur la* *mémorisation ou les inférences automatisées des résultats du cours ne sont pas suffisants pour la résolution* » (p. 47).

D'une manière générale, les étudiants ont tendance à «réduire les mathématiques » à un ensemble d'algorithmes algébriques tout en évitant les graphiques ainsi que les images géométriques. Ils n'ont pas l'idée de basculer vers une autre forme du concept (du point de vue mathématique) pour interpréter les données dans le texte initial. Il faut souligner que le concept d'intégrale possède au moins trois formes : aire, primitive, processus d'approximation. Nous avons préféré le terme forme par rapport à celui de conception car nous considérons la conception comme un ensemble de connaissances privilégiées qui se déclenche automatiquement au début de l'activité mathématique. Nous considérons également que le passage d'une conception à une autre permet de développer dans le répertoire cognitif de l'étudiant, qui n'est pas souvent fixe, une autre forme du concept mathématique. Cette forme est appelée pour les besoins de la réalisation de la tâche, alors que la conception est fixe dans l'image mentale de l'apprenant : c'est la forme finale du concept même si elle est incomplète ou fausse.

5 Conclusion et perspectives

L'analyse des données présentées ci-dessus nous a permis d'identifier trois catégories d'étudiants :

- La première catégorie se rapporte à la conception d'aire. Il faut dire que cette conception est liée à l'aire en tant que représentation graphique de l'intégrale et c'est dû au contexte dans lequel cette conception a été formée à l'origine. Le rôle de l'aire se réduit ainsi à être une simple interprétation géométrique de l'intégrale au lieu de contribuer à la fonder en faisant le lien avec les sommes de Riemann. Haddad [22] souligne que le calcul d'aire à partir des intégrales amène beaucoup d'étudiants à identifier ces deux notions et les considèrent comme synonymes. De son côté, Akrouti [19] précise que les liens sont faits de façon artificielle en définissant l'aire comme l'intégrale définie de la valeur absolue d'une fonction continue. Dans le même ordre d'idées, Sealey et Engelke [23, 15] soulignent que la notion « d'aire sous la courbe » est insuffisante pour comprendre la structure sous-jacente des intégrales définies. Ainsi, le rapport établi par ces étudiants avec l'intégrale présente des limites et pourrait mettre en échec la construction des connaissances adéquates. Ils trouvent beaucoup de problèmes pour mettre en application cette conception dans des situations réelles.
- La deuxième catégorie se base sur le TFA et se rapporte à la conception de primitive. Les étudiants se limitent aux données algébriques dans le texte initial et ne pense pas à les interpréter dans un autre registre tel que le registre graphique lorsque la situation s'impose. Ils sont généralement capables de mettre en œuvre des procédures d'intégration. Un nombre important de ces étudiants est incapable d'écrire correctement le TFA. Il ne fait pas l'attention à la continuité de la fonction à intégrer. Cependant, la continuité est une condition nécessaire. Cette conception relie le concept d'intégrale à la recherche d'une primitive et le limite à son aspect opératoire. Par la suite, elle amène les étudiants à développer des connaissances d'ordre opérationnel. Akrouti [15] précise qu'une utilisation excessive à l'égard des représentations algébriques des fonctions évoque des difficultés. En conséquence, les étudiants ne s'habituent pas à utiliser des représentations graphiques pour travailler avec des intégrales, pourtant, ils peuvent visualiser des informations et des connaissances au moyen de ces graphiques. En plus, ces représentations graphiques rendent la conceptualisation beaucoup plus flexible en procédant à un découpage pour évoquer des approximations et passer à des représentations numériques. Ceci permet de mettre en œuvre une métaphore visuelle qui aide les étudiants à comprendre comment une intégrale se rapporte à des quantités infinitésimales mais, cette visualisation est absente. Les étudiants ayant cette conception

pourraient présenter des difficultés lorsqu'il s'agit d'un contexte non routinier ou légèrement modifié.

- La troisième catégorie considère l'intégrale définie comme un processus d'approximations. Elle se base sur la méthode des rectangles pour mettre en œuvre cette procédure. Bien que cette catégorie considère l'intégrale définie comme un processus infini d'approximations, elle ne se concentre que sur les fonctions positives. Le cas des fonctions négatives, pourtant rencontré en cours, est absent des réponses des étudiants.

Il est à noter que ces résultats indiquent également que la majorité des étudiants de notre étude a évoqué une conceptualisation d'intégration qui ne parvient pas à souligner la structure sous-jacente de l'intégrale définie. Bien qu'un nombre important d'étudiants interrogés interprète l'intégrale définie comme une aire sous la courbe, très peu d'entre eux utilisent cette interprétation pour répondre à la troisième question. Ils se sont basés sur le Théorème Fondamental de l'Analyse pour calculer la valeur de l'intégrale. Cela est probablement dû à l'habitude du recours au calcul de primitive dans la résolution des tâches proposées. Le registre graphique est quasiment absent à l'exception des représentations de quelques fonctions. Le processus de résolution est généralement traité dans le registre algébrique.

Comprendre la nature des conceptions des étudiants et les conditions qui ont amené à les développer est une étape importante dans l'élaboration d'une nouvelle approche d'enseignement pouvant donner aux étudiants la possibilité de construire de puissants concepts images et par la suite de développer des connaissances qui sous-tendent la structure sous-jacente de l'intégrale et le sens qui lui est associé.

Références

1. I. Akrouti, *Students' conceptions of the definite integral in the first year of studying science at university*, in Proceeding of the 11th Congress of the European Society of Research in Mathematics Education, CERME11, 5-10 February 2019, Utrecht, Netherlands. ERME Publishing. ISBN 978-90-73346-75-8 (2019)
2. S. R. Jones, Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts. Journal of Mathematical Behavior, **38**, 9–28, (2015)
3. V. Sealey, & M. Oehrtman, *Calculus students' assimilation of the Riemann integral*, in Proceedings of the 10th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. San Diego, CA: San Diego State University, (2007)
4. P. W. Thompson, & J. Silverman, The concept of accumulation in calculus. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics 43-52. Washington, DC: Mathematical Association of America, (2008)
5. V. Sealey, *Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient?*, in Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Merida, Mexico, (2006)
6. V. Sealey, A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. The Journal of Mathematical Behavior, **33, 1**, 230–245, (2014)
7. J. Bezuidenhout, & A. Olivier, *Students' conceptions of the integral*, in T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), Proceedings of the 24th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Hiroshima, Japan, (2000)
8. W. Hall, *Student misconceptions of the language of calculus: Definite and indefinite integrals*, in Proceedings of the 13th special interest group of the Mathematical

Association of America on research in undergraduate mathematics education. Raleigh, NC (2010)

9. I. Akrouti and S. Haddad, *The impact of the teacher's choices on students' learning: The case of Riemann integral in the first year of preparatory classes*, in Proceeding of the 10th Congress of the European Society of Research in Mathematics Education, CERME10, 1-5 February 2017, Dublin, Ireland. ERME Publishing. ISBN 978-1-873769-73-7, (2018)
10. A. Orton, Students' understanding of integration. Educational Studies in Mathematics, **14**, **1**, 1-18, (1983)
11. S. Rasslan, & D. Tall, *Definitions and images for the definite integral concept*, in A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Norwich, UK, (2002)
12. S. R. Jones, Understanding the integral: Students' symbolic forms. The Journal of Mathematical Behavior, **32**, **2**, 122-141, (2013)
13. S. R. Jones, Adding it all up: Reconceiving the introduction to the integral. Mathematics Teacher, **107**, **5**, 372-377, (2014)
14. B. Czarnocha, & al, Conceptions of area: In students and in history. The College Mathematics Journal, **32**, **2**, 99-109, (2001)
15. I. Akrouti, *Conceptions des étudiants de l'intégrale définie en Classe préparatoire*, in Hausberger, M. Bosch & F. Chelloughi (Eds.), Third conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, INDRUM2020, 12-19 September 2020, Bizerte, Tunisia, ISSN 2496-1027, (2020)
16. D. Tall & S. Vinner, Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, **12**, 151-169, (1981)
17. A. Sfard, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 1991, **22**, 1-36, (1991)
18. I. Akrouti, Transition secondaire/supérieur en analyse : cas de l'intégrale de Riemann en classes préparatoires, Mémoire de master en didactique des mathématiques, de l'Université Virtuelle de Tunis, ISEFC, (2016)
19. I. Akrouti, *Les difficultés liées à l'apprentissage de l'intégrale définie à l'entrée en classe préparatoire*, in Proceeding of the Septième édition du colloque l'Espace Mathématique Francophone, EMF 2018, 22-26 Octobre 2018, 615-619, Parie, France. Edition de l'IREM de Paris ISBN : 978-2-86612-391-8, (2019)
20. A. Sfard, & L. Linchevski, The gains and pitfalls of reification – the case of algebra. Educational Studies in Mathematics, **26**, 191-228, (1994)
21. I. Ghedamsi & R. Tanazefti, Sur les difficultés d'apprentissage des nombres complexes en fin du secondaire. Petit x, **98**, 29-52, (2015)
22. S. Haddad, Que retiennent les nouveaux bacheliers de la notion d'intégrale enseignée au lycée ? Petit x, **92**, 5-30, (2013)